7. Correction des exercices

Exercice 3.1 Les réels qui correspondent aux points A, B, C, D, E, F sont par exemple : $A(0)$, $B(\frac{\pi}{3})$, $C(\frac{2\pi}{3})$, $D(\pi)$, $E(\frac{4\pi}{3})$, $F(\frac{5\pi}{3})$.
Si on arrive à se ramener à des vecteurs d'origine O, on pourra utiliser ces nombres pour calculer les angles comme à la Def 3.4.
a) Donc $(\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{2\pi}{3} - 0 = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$
b) On a $\vec{AB} = \vec{OC}$ et $\vec{BE} = 2\vec{OE}$, donc $(\vec{AB}, \vec{BE}) = (\vec{OC}, 2\vec{OE})$; or $\vec{OE}$ et $2\vec{OE}$ sont colinéaires, donc l'angle $(\vec{OC}, 2\vec{OE})$ est égal à l'angle $(\vec{OC}, \vec{OE}) = \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Donc $(\vec{AB}, \vec{OC}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
c) De la même manière, $(\vec{AB}, \vec{CD}) = (\vec{OC}, \vec{OE}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
d) $(\vec{AB}, \vec{OE}) = (\vec{OC}, \vec{OE}) = \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Exercice 3.2 1°) D'après la relation de Chasles, $(\vec{BA}, \vec{CB}) = (\vec{BA}, \vec{AC}) + (\vec{AC}, \vec{CB})$.
Or $(\vec{BA}, \vec{AC}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) + \pi\ [2\pi]$, et $(\vec{AC}, \vec{CB}) = (\vec{CA}, \vec{CB}) + \pi\ [2\pi]$;
donc $(\vec{BA}, \vec{CB}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) + 2\pi\ [2\pi]$,
ou encore $(\vec{BA}, \vec{CB}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{CA}, \vec{CB})\ [2\pi]$.

2°)$(\vec{BA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}\ [2\pi]$.
C'est la mesure principale de $(\vec{BA}, \vec{CB})$.

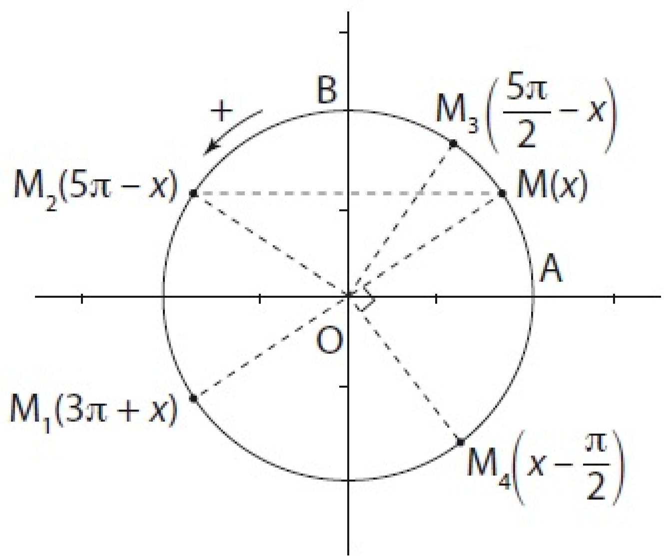
Exercice 3.3 1°) $(\vec{AD}, \vec{CB}) = (\vec{AD}, \vec{AC}) + (\vec{AC}, \vec{CB})\ [2\pi]$.
Or $(\vec{AC}, \vec{CB}) = (\vec{CA}, \vec{CB}) + \pi\ [2\pi]$, d'où le résultat.
2°) $(\vec{AD}, \vec{CB}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{-4\pi+3\pi+12\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}\ [2\pi]$.
(on a un triangle équilatéral et un triangle isocèle rectangle) ; c'est la mesure principale.

Exercice 3.4 1.a) $(\vec{u}, 2\vec{v}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$
1.b) $(\vec{v}, -2\vec{u}) = (\vec{v}, -\vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$
1.c) $(-\vec{v}, -\vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

2.a) $(3\vec{u}, -2\vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = \alpha + \pi\ [2\pi]$
2.b) $(-2\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + \pi\ [2\pi]$
2.c) $(-3\vec{u}, -2\vec{v}) = (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha\ [2\pi]$

Exercice 3.5 (a) $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, donc $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, et $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
(b) $\frac{71\pi}{3} = 24\pi - \frac{\pi}{3}$, donc $\cos\frac{71\pi}{3} = \frac{1}{2}$, et $\sin\frac{71\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $-\frac{97\pi}{3} = -32\pi - \frac{\pi}{3}$, donc $\cos\left(-\frac{97\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, et $\sin\left(-\frac{97\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 3.6 1)



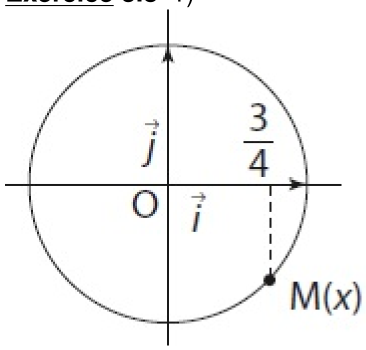
2)$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cos x$;
$\sin(3\pi + x) = -\sin x$;

$\cos(5\pi - x) = -\cos x$;
$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, donc :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) + \cos(5\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Exercice 3.7 1) N est associé à $x + \frac{\pi}{2}$; P est associé à $x + \pi$; Q est associé à $x + \frac{3\pi}{2}$.
2.a) $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x - \sin x - \cos x + \sin x = 0$
2.b) $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x + \pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x + \cos x - \sin x - \cos x = 0$

Exercice 3.8 1)



2.a) $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{16}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; donc $\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.
2.b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$
$\sin(x + \pi) = -\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x = \frac{3}{4}$
$\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{3}{4}$

Exercice 3.9 a) $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$ donc $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
b) $\sin x = \sin\frac{5\pi}{4}$ donc $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.
c) $\sin x = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ donc $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$.
(dans le second cas, la mesure principale est $\frac{-\pi}{6}$
d) $\cos x = \cos\frac{5\pi}{6}$ donc $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Exercice 3.10 1.a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$; $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\}$
1.b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$; $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$
1.c) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$; $\mathscr{S} = \{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\}$
2.a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\mathscr{S} = \{-\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\}$
2.b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathscr{S} = \{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\}$
2.c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathscr{S} = \{-\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}\}$
On n'écrit pas le "modulo 2π" dans cet exercice car on travaille dans un intervalle pré-déterminé.

Exercice 3.11 a) $\cos x = 0,6$; $\mathscr{S} = \{0,927\}$
b) $\sin x = -\frac{2}{5}$; $\mathscr{S} = \{-0,412\}$